

TENTAMEN CALCULUS 1, 27 AUGUSTUS 2008, 14:00–17:00

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Alle (negen) opgaven tellen even zwaar. Het gebruik van boek(en), aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen niet toegestaan.

- (1) Voor een positief geheel getal n is per definitie $n!$ het product van alle getallen 1 tot en met n (dus $3! = 6$ en $5! = 120$ enzovoort). Toon aan dat als $n \geq 6$, dan is $n! > 2^n \cdot n$.
- (2) Zoals je weet is $3 \ln 2 + 2 \ln 3 = \ln 72$. Leg uit, dat een dergelijk mooi verband tussen $\ln 2$ en $\ln 3$ en $\ln 5$ niet bestaat. Anders gezegd, bewijs dat als k, n, m gehele getallen zijn niet alle drie gelijk aan 0, dan is $k \ln 2 + n \ln 3 \neq m \ln 5$.
- (3) Gegeven is een reëel getal t . Bepaal het reële deel van het complexe getal $t \cdot e^{it}/(1 - i)$.

- (4) Zoals bekend wordt de cosinus van een complex getal z gegeven als

$$\cos z := (e^{iz} + e^{-iz})/2.$$

Bepaal *alle* z met de eigenschap dat $\cos z$ reëel is.

- (5) Gegeven de functie $f(x) = 1/x$. Laat direct uit de definitie van ‘afgeleide’ zien, dat $f'(1) = -1$.
- (6) De inverse van de functie $\tan x$ geven we aan met $\arctan x$ (of ook wel met $\tan^{-1} x$). Toon aan, dat $\arctan(x) \leq x$ als $x \geq 0$.
- (7) Bereken getallen a, b, c zodat geldt

$$\frac{4x^2 + 9x + 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{(x + 1)^2} + \frac{c}{x}.$$

- (8) Bereken een primitieve van $\frac{1}{\cosh x}$.
- (9) Bepaal functies $f(x)$ en $g(x)$ zodat de differentiaalvergelijking

$$y' = f(x)y + g(x)$$

zowel e^x als $\sinh x$ als oplossingen heeft.